Universidade Federal de São João del-Rei

Bárbara Cristina Dâmaso de Jesus

NÚMEROS IRRACIONAIS: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ENSINOS FUNDAMENTAL II E MÉDIO

São João del-Rei - MG

2017

Bárbara Cristina Dâmaso de Jesus

NÚMEROS IRRACIONAIS: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ENSINOS FUNDAMENTAL II E MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Viviane Cristina Almada de Oliveira

São João del-Rei, 15 dezembro de 2017.

Banca Examinadora

____
Orientadora: Profª. Drª. Viviane Cristina Almada de Oliveira

____
Profª. Drª. Fabíola de Oliveira Miranda

____
Profª. Drª. Romélia Mara Alves Souto

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida e por estar comigo nos momentos de maior dificuldade, me ensinando a ter fé, força e coragem para vencer os obstáculos presentes na vida.

A toda a minha família e amigos, em especial a minha mãe, meu irmão e minha tia que estiveram presentes nesta caminhada me dando conselhos e me apoiando em todas as minhas decisões.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica, tanto do Ensino Básico como da Graduação. Vocês me fizeram ter certeza que com a Educação podemos transformar o mundo.

A minha orientadora Viviane que sempre me ajudou da melhor forma com suas palavras. Eterna admiração pela pessoa e profissional que é.

Enfim, obrigada a todos que participaram desta jornada e contribuíram de alguma forma para a conclusão deste trabalho.

Gratidão!

“Tão correto e tão bonito
O infinito é realmente
Um dos deuses mais lindos.”

Renato Russo

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo descrever e discutir como os Números Irracionais são abordados em alguns livros didáticos da Matemática da Educação Básica. Para subsidiar o estudo proposto, inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica acerca de como historicamente se deu a produção dos Números Irracionais e sobre o ensino-aprendizagem dos mesmos. Os livros escolhidos para análise foram duas coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e que poderão ser utilizadas por escolas de todo o Brasil a partir do ano de 2018. A partir do estudo desenvolvido, realizamos uma análise crítica e reflexiva sobre a abordagem dos Números Irracionais nestas coleções. Constatamos que, apesar dos livros didáticos apresentarem grande parte do que é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, algumas considerações relevantes sobre esses números, tais como as ideias de aproximação e de infinito, não são realizadas ou enfatizadas nos livros didáticos. Neste sentido, ressaltamos a importância da criticidade do professor ao utilizar determinado livro didático, avaliando-o nas suas proposições e, quando achar conveniente, alterar ou complementar o tratamento que ele apresenta para certos conteúdos.

PALAVRAS-CHAVE: Números Irracionais. Livro didático. Educação Matemática.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

“Números Irracionais são aqueles que possuem reticências no final”. Essa frase foi ouvida pela autora deste trabalho enquanto realizava uma intervenção no âmbito do PIBID[1], referente ao conteúdo de Conjuntos Numéricos, com uma turma de alunos do 1º ano do Ensino Médio. Essa afirmação do aluno para caracterizar o conjunto dos Números Irracionais indica o modo como ele compreende esses números, o que nos sugere como produtivo o questionamento sobre a abordagem dos Números Irracionais na Educação Básica.

Publicações na área de Educação Matemática que tratam dos Números Irracionais apresentam algumas dificuldades que alunos da Educação Básica geralmente têm na compreensão de ideias a eles referentes. Mendes, por exemplo, nos indica que muitas vezes alunos

> [...] não conseguem distinguir a diferença entre um número racional e um irracional; números com infinitas casas decimais periódicas são confundidos com irracionais; não há uma ideia formada sobre o infinito; não há uma justificativa para adquirir conhecimentos sobre os números irracionais. (MENDES, 2012, p. 29)

Santos (2007), em seu trabalho sobre o ensino de números reais na Educação Básica, apresenta algumas das dificuldades e complicações para a construção do conceito de número irracional, com base em sua revisão bibliográfica. Destacou a identificação entre as representações decimais 3,1416... e π e também entre 2,7182... e *e* (número de Euler); a classificação de 3,1416... como sendo um número irracional; a confusão entre número e sua aproximação atribuindo a ambos o mesmo significado; a definição de Números Irracionais como sendo somente aqueles representados com raízes; e, o desconhecimento da existência de infinitos Números Irracionais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental consideram de suma importância que o ensino seja significativo para o aluno, apontando que

> [...] a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. [...] O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece

[1] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

> entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1998, p. 57)

Pensando nessas ideias, surgem algumas perguntas: Como podemos relacionar os Números Irracionais a outros objetos e acontecimentos? De que modo os Números Irracionais podem ser conectados a outras áreas, aos Temas Transversais, ao cotidiano e a outros temas matemáticos? Isso é possível?

No intuito de tentar responder a esses questionamentos, entendemos que é necessário investigar como o ensino dos Números Irracionais está sendo desenvolvido na Educação Básica. Martins e Santos destacam nos resultados de sua pesquisa a importância do livro didático, indicando que este é um instrumento “imprescindível à sala de aula, um material de consulta, um recurso didático que se constitui como parte do processo de ensino e aprendizagem.” (2011, p.26). Nessa perspectiva, o livro didático mostra-se como um material influente no trabalho do professor, o qual, em muitas vezes, é o único recurso de apoio para professores na elaboração de suas práticas pedagógicas e por encaminhar o desenvolvimento de conteúdos, sendo “capaz de provocar e nortear possíveis mudanças e aperfeiçoamento na prática pedagógica” (2001, p.21).

Essas considerações nos impelem a considerar que um estudo investigativo da abordagem dos Números Irracionais em livros didáticos pode nos ajudar a refletir sobre o modo como este tema vem sendo ou pode ser tratado no ensino de Matemática. Lüdke e André ainda ressaltam que:

> [...] a análise de documentos, como o livro didático de ensino básico, permite uma coleta de dados que revelam aspectos de um tema. Esta se constitui como fonte natural estável para retirar evidências e confirmar hipóteses de pesquisa, além de fornecer indícios de situações que poderiam ser exploradas através de outros métodos ou perspectivas. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986 apud POMMER, 2011, p.3)

Na sequência, apresentaremos algumas considerações acerca dos Números Irracionais, no que tange ao desenvolvimento histórico desses números, bem como ao seu ensino-aprendizagem em contexto escolar. Feito isso, apresentaremos duas coleções de livros didáticos, buscando discutir como nelas os Números Irracionais são tratados.

2. SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS: AS IDEIAS DE IRRACIONALIDADE E INCOMENSURABILIDADE

A Matemática desenvolvida pelos egípcios e babilônicos se caracterizava por sua aplicabilidade prática, isto é, se vinculava às suas necessidades práticas do dia-a-dia e não à organização estrutural de uma ciência. Nesta época, algumas aplicações práticas levaram estes povos a calcularem aproximações para π. Segundo Santos (2003, p.1), babilônios e egípcios já sabiam que o perímetro do círculo poderia ser obtido multiplicando o seu diâmetro por essa constante. No entanto, embora percebida a existência de uma relação entre o diâmetro e o comprimento da circunferência, o significado de irracionalidade deste número só viria a ser estabelecido posteriormente.

Já na Antiguidade, os gregos encaravam a Matemática como uma ciência propriamente dita, sem se preocuparem com suas aplicações, levando em conta problemas relacionados com processos infinitos, movimento e continuidade. A ideia de irracionalidade dos Números Irracionais nos remete aos Pitagóricos, durante o Período Helenístico (146 a.C. – 323 a.C.). Boyer descreve que para os Pitagóricos "a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas **dos inteiros e suas razões**" (BOYER, 1996, p. 50, grifo nosso). Tudo poderia ser comensurado, expressado através de uma unidade de medida. Ou seja, dados dois segmentos comensuráveis "é possível expressar a medida de um deles utilizando o outro como unidade de medida." (MIGUEL, 2009, p.219).

No entanto, não se sabe exatamente de qual circunstância teria surgido o problema da incomensurabilidade. Boyer (1996) supõe que tal fato pode ter ocorrido pela aplicação do Teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo isósceles. Santos descreve esse problema:

> Considere o quadrado ABCD. Seja BC a diagonal e AB um dos lados do quadrado. Suponhamos, inicialmente, como os gregos, que exista uma subunidade u suficientemente pequena de tal modo que BC = m·u e AB = n·u,

sendo $\frac{m}{n}$ irredutível. Logo BC = $\frac{m}{n} \cdot$ AB . Como o triângulo ABC é retângulo e isósceles, temos que:[2]

$$(\mathrm{BC})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{AC})^2 = 2.(\mathrm{AB})^2$$

Substituindo agora o valor de BC na equação acima, obtemos:

$$\left(\frac{m \cdot AB}{n}\right)^2 = 2 \cdot (AB)^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} \cdot (AB)^2 = 2 \cdot (AB)^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2$$

Isto é, m² é par.
Se m² é par, então m é par. Logo m = 2k, k um número inteiro.
Mas como $\frac{m}{n}$ é irredutível, temos que n é ímpar.
No entanto, ao substituir m = 2k, podemos observar

$$(2\mathrm{k})^2 = 2\mathrm{n}^2 \Rightarrow 4\mathrm{k}^2 = 2\mathrm{n}^2 \Rightarrow \mathrm{n}^2 = 2\mathrm{k}^2 \Rightarrow \mathrm{n}^2 \text{ é par} \Rightarrow \mathrm{n} \text{ é par}$$

Assim, n deve ser simultaneamente par e ímpar. (SANTOS, 2007, p.14).

A conclusão acima é tida como uma “monstruosidade aritmética” (CARAÇA apud SANTOS, 2007, p.15). Tal absurdo é obtido ao considerarmos que o lado $AB = m \cdot u$ e a diagonal $BC = m \cdot u$ são comensuráveis, em outras palavras, estamos considerando que AB e BC têm uma unidade de medida comum. Logo, AB e BC são incomensuráveis.

O estranhamento no caso do número irracional √2 aconteceu na tentativa de se calcular a medida da diagonal do quadrado de lado com medida igual a 1, que recaía sobre o problema do triângulo retângulo isósceles. Sabia-se que a diagonal existia, pois era possível construí-la com régua e compasso; no entanto, não sabiam como definir e operar com esses novos números, havia lacunas na reta racional. O historiador matemático Howard Eves também relatou este fato:

> A descoberta da irracionalidade de √2 provocou alguma consternação nos meios pitagóricos. Pois não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proporções da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. Tão grande foi o “escândalo lógico” que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta a lenda que o pitagórico Hipasso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto. (EVES, 1997, p. 106)

Há também grande possibilidade de a ideia de incomensurabilidade ter sido construída no processo de:

[2] $(BC)^2 \cdot (AB)^2 + (AC)^2 = 2 \cdot (AB)^2$ esta é a equação que aparece no texto original.

> [...] simples observação de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono, elas formam um pentágono regular menor e as diagonais do segundo pentágono por sua vez formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional. (BOYER, 1996, p.50)

Com esta situação, surge a necessidade de desenvolver uma teoria sobre razões envolvendo grandezas comensuráveis e incomensuráveis, uma vez que “o segmento já não podia mais ser considerado indivisível, mas infinitamente divisível.” (BONGIOVANNI, 2005, p. 94). Gonçalves e Possani apud Tannery (2010) descreveram no começo do século XX esse acontecimento matemático como “um verdadeiro escândalo lógico, uma pavorosa pedra no caminho.” (p.16).

Por outro lado, há autores que discordam deste drama na história dos irracionais; alegam que este fato está acompanhado do questionamento e desenvolvimento de várias outras ideias da Matemática.

> [...] a descoberta é tida como tendo provocado uma crise nos fundamentos da matemática daquele tempo; mas comentadores como o próprio Aristóteles não a mencionam, e a ideia pode ser uma interpolação aistórica de alguns gregos posteriores, ou mesmo um mal-entendido. [...] Assim, longe de experimentar uma crise de fundamentos, os gregos antigos podem ter gozado uma época de grandes jornadas matemáticas” (GONÇALVES e POSSANI, 2009, p.7)

Roque também apresenta outra visão referente à história dos irracionais. Para ela, a matemática abstrata e a teoria dos números, desenvolvida pelos pitagóricos, relacionada com a geometria, estavam em dois planos distintos. Isto é,

> [...] “tudo é número” não significava “todas as grandezas são comensuráveis”. A tese de que “tudo é número” não se traduz na crença de que todas as grandezas podem ser comparadas por meio de números, uma vez que o problema geométrico da comparação de grandezas parecia não fazer parte do pensamento pitagórico. (ROQUE, 2012, p. 125)

De todo modo, é possível observar que não é possível se estabelecer uma explicação única acerca das origens da ideia de irracionalidade. Entretanto, compreender tais possibilidades pode auxiliar-nos na proposição de abordagens para o tratamento dos Números Irracionais em qualquer nível de ensino.

A proposta de solução para o problema da incomensurabilidade veio com Eudoxo (408 a 355 a.C.). A solução se desenvolvia a partir do raciocínio geométrico e aritmético, com base no livro V (definição 6)[3] dos Elementos, de Euclides. Segundo Bongivanni (2005), Eudoxo desenvolveu uma teoria que envolvia os conceitos de grandezas comensuráveis e incomensuráveis, porém não os relacionou com a reta numérica. Considerou os segmentos AD, DB, AE e EC tais que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Nessa configuração poderiam acontecer dois casos: os segmentos serem comensuráveis ou incomensuráveis.

- Se AD e DB forem comensuráveis, isto é, se $\frac{AD}{DB}$ for racional então existem inteiros positivos *m* e *n* tais que $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$ e $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$. Assim é válida a igualdade:

$$se\ m \cdot DB = n \cdot AD\ então\ m \cdot EC = n \cdot AE$$

- Se AD e DB forem incomensuráveis, isto é, não existe razão irredutível de dois inteiros que expresse tal unidade de medida. Contudo, tendo como condição a existência de dois inteiros positivos *m* e *n* e uma dessas desigualdades, $\frac{m}{n} < \frac{AD}{DB}$ então $\frac{m}{n} < \frac{AE}{EC}$ ou se $\frac{m}{n} > \frac{AD}{DB}$ então $\frac{m}{n} > \frac{AE}{EC}$, são válidas as relações:

$$se\ m \cdot DB < n \cdot AD\ então\ m \cdot EC < n \cdot AE$$

$$se\ m \cdot DB > n \cdot AD\ então\ m \cdot EC > n \cdot AE$$

Os gregos não tomaram o ente definido por essas classes, ou seja, o número real *α* que é a medida de um segmento em relação a outro segmento. Nesse sentido, Santos diz que Platão (428 – 348 a.C.) havia percebido

> [...] este abismo entre a geometria e a aritmética, e sugerido, por conseguinte, que a solução do problema da medida das "quantidades incomensuráveis" seria

[3] Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes. (BONGIOVANNI, 2005, p. 96)

> alcançada através de uma construção axiomática do conceito de número, independente de qualquer base geométrica. (SANTOS, 2007, p.17)

Em 1872, a exposição moderna de Números Irracionais dada pelo alemão J.W.R. Dedekind (1831 – 1916) coincide com as formulações de Eudoxo. Segundo Bongiovanni (2005), Dedekind se questionou sobre o que existiria na grandeza geométrica que a distinguia dos números racionais e foi buscar inspiração nas teorias das proporções de Eudoxo.

No decorrer de seus estudos, Dedekind observou que:

> 1) Existe mais pontos na linha reta do que números racionais;
> 2) Então, o conjunto dos números racionais não é adequado para aplicarmos aritmeticamente a continuidade da reta;
> 3) Logo, é absolutamente necessário criar novos números para que o domínio numérico seja tão completo quanto a reta, isto é, para que possua a mesma continuidade da reta. (MIGUEL, 2009, p. 233)

Com bases nestas observações, o alemão Dedekind publicou em seu livro *Stetigkeit und di Irrationalzahlen* (Continuidade e Números Irracionais) a solução para o problema dos Números Irracionais, através de operações que chamou de cortes. Mol (2013) descreve que para Dedekind o conceito de limite deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia. Se perguntava o que havia na grandeza geométrica contínua que a distinguia dos números racionais. Chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta: a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto dado. Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e um só, ponto que realiza essa divisão em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes.

Luchetta e Miles relatam que

> Dedekind viu que o domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais se supusermos que os pontos sobre a reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais (axioma de Cantor-Dedekind). Isso significa que para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B tais que todo número da primeira classe, A, é menor que todo número da segunda classe, B, existe um e um só número real que produz essa classificação. Se A tem um máximo, ou se B tem mínimo, o corte

> define um número racional; mas se A não tem máximo e B não tem mínimo, então o corte define um número irracional. (LUCHETTA E MILES, 2000)

Estes mesmos autores, ainda acrescentam que Dedekind observou que os teoremas fundamentais sobre limites podem ser demonstrados sem recorrer à geometria. De fato, foi a geometria que iniciou o caminho para uma definição de continuidade, mas, no fim, esta foi excluída da definição aritmética formal do conceito. Deste modo, a noção de corte de Dedekind, no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, tinha agora substituído a grandeza geométrica como espinha dorsal da análise.

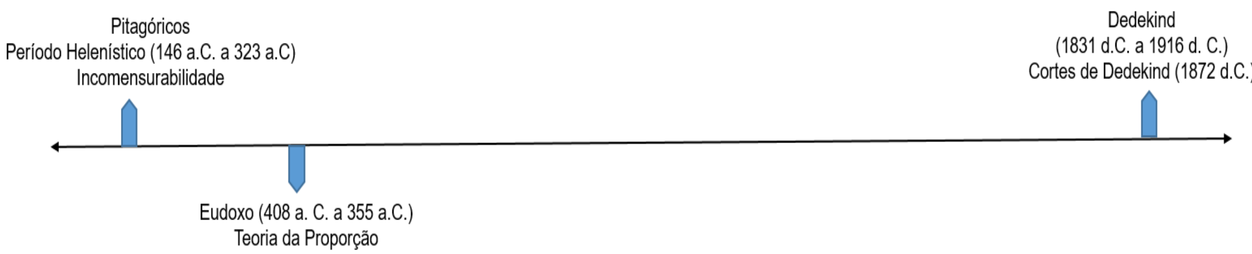


Figura 1 – Ordem cronológica da problematização sobre a ideia de irracionalidade

O que se pode observar é que desde a primeira problematização sobre a ideia de irracionalidade na Grécia antiga até definição atual de Dedekind, decorreu um longo espaço de tempo. O fato da gênese que cerca a ideia de irracionalidade ter se prolongado durante tanto tempo pode ser indício da dificuldade de compreensão dos Números Irracionais no contexto escolar, o que nos aponta como importante nossa reflexão acerca do ensino desses números.

3. O ENSINO-APRENDIZAGEM DE NÚMEROS IRRACIONAIS

O longo período histórico que transcorreu na constituição da ideia de irracionalidade é indício de dificuldades que homens e mulheres tiveram na sua compreensão. Atualmente, no contexto escolar, essa dificuldade parece se repetir no entendimento dos números irracionais. Pommer (2011, p.2) afirma que, no campo de ensino da Matemática, os irracionais ainda permanecem como um problema e seu ensino demanda mais pesquisas e esclarecimentos.

Esse mesmo autor nos diz que "o conhecimento matemático dos Números Irracionais, adquirido através do movimento histórico e sistematizado pela comunidade de matemáticos, sofreu uma transposição didática para ser ensinado em sala de aula" (p. 21). Uma das dificuldades destacada por Pommer para a compreensão dos Números Irracionais é o modo como se realiza a transposição didática desse tema. Geralmente, o conjunto dos números reais é tratado como a união de dois conjuntos disjuntos: os números racionais e os Números Irracionais; em seguida, o conjunto dos Números Irracionais é apresentado como sendo formado pelos números reais não racionais. Estabelece-se assim, um quadro de circularidade. E, neste sentido, Pommer compreende ser necessário se repensar o ensino dos Números Irracionais em nível escolar.

O que se pode observar é que a construção do conhecimento acerca dos Números Irracionais está diretamente relacionada com a compreensão do conceito de números racionais. Mosca ressalta que os Números Irracionais

> [...] possuem estreita ligação com o conjunto dos números racionais, principalmente no que tange à sua definição, no sentido de que se o aluno não compreender bem o significado dos assuntos envolvendo o conjunto dos números racionais, torna-se mais difícil se apoderar da compreensão dos significados do conjunto dos números irracionais. (MOSCA, 2013, p.15)

Algumas abordagens sobre conteúdos matemáticos podem contribuir para que se produzam compreensões equivocadas dos Números Irracionais. Um exemplo dessa situação está no estudo da fórmula apresentada para o cálculo do comprimento C da circunferência (C = $2 \cdot \pi \cdot r$, onde r é o raio da circunferência). A partir da sua manipulação, o aluno pode chegar ao seguinte resultado:

$$\pi = \frac{C}{2 \cdot r}$$

Com base neste resultado e dependendo do modo como as definições foram assimiladas pelo aluno, este pode concluir que escreveu um número irracional, no caso π, como a razão de dois números inteiros.

Outro problema recorrente no tratamento dos Números Irracionais é apontado por Bortolossi e Mózer. Esses autores consideram que um "erro frequente detectado entre os alunos é o de eles considerarem, por exemplo, que π é igual a 3,14 e que $\sqrt{3}$ é igual a 1,73" (BORTOLOSSI e MÓZER, 2016, p. 3). Geralmente, considerações como essas, muitas vezes sugeridas pelo livro didático ou pelo professor, afastam a ideia da definição de número irracional do aluno. Este não compreende que 1,73 é uma aproximação com duas casas decimais de $\sqrt{3}$ e que, operando com essa aproximação, por exemplo, o resultado que será obtido ao final da operação também será uma aproximação.

Considerando uma análise histórico-social do que ocorreu no Brasil, no período de 1970 e 1980, com a desvalorização do ensino público e a falta de investimento na qualificação do professor, o livro didático começou a ser visto com maior importância, no apoio para o desenvolvimento da prática do professor brasileiro. Assim, no decorrer dos anos, Martins e Santos (2001, p.21) afirmam que "o livro didático vem se constituindo em uma ferramenta de caráter pedagógico capaz de provocar e nortear possíveis mudanças e aperfeiçoamento na prática pedagógica".

De fato, o livro didático exerce grande influência na educação escolar. Silva e Turíbio, em trabalho referente à importância do livro didático de Matemática na prática pedagógica do professor, afirmam que o livro didático é um instrumento que possui a capacidade de organizar conteúdos e definir conceitos, auxilia para a elaboração de estratégias de ensino e também direciona uma sequência didática a ser planejada pelo professor. Ainda destacam que o docente "tem toda a liberdade de, dentro do assunto dar outros enfoques, bem como acrescentar, modificar, complementar e também inserir novos problemas de acordo com as necessidades surgidas e com o desenrolar do conteúdo." (2014, p.5)

Soma-se a isso o fato dos livros didáticos também serem material utilizado pelos alunos para estudo.

> [...] mesmo com todos os avanços da tecnologia e toda a diversidade de fontes de informações disponíveis, ainda é o principal material didático utilizado em sala de aula, pois é uma ferramenta a que todos os alunos juntamente têm acesso e, portanto, a mais usual. (TURÍBIO E SILVA, 2014, p. 5)

É valido ressaltar que os livros didáticos que chegam até as escolas públicas atualmente são selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Os livros que estão sendo utilizados em 2017 e serão utilizados em 2018, foram selecionados pelo programa com base nas seguintes especificidades:

> - Fornecer informação científica e geral: diante da impossibilidade de se conhecer tudo e de manter-se atualizado em todas as frentes de estudo, uma função importante do livro didático está em assegurar a qualidade, a correção e a atualização das informações científicas e gerais que apresenta. Quanto mais aprofundadas e voltadas aos objetivos do ensino, mais essas informações contribuem com a tarefa docente de ensinar conhecimentos válidos e pertinentes.
> - Oferecer formação pedagógica diretamente relacionada ao componente curricular em questão: tendo em vista que as transformações de natureza epistemológica e teórica realizadas numa determinada área do conhecimento implicam, também, mudanças metodológicas em relação aos procedimentos e às estratégias de ensino, um livro didático que incorpore adequadamente tais avanços poderá contribuir de forma mais expressiva para a formação continuada dos professores.
> - Auxiliar no desenvolvimento das aulas sem retrair a autonomia docente: um bom livro didático não se furta de oferecer ao (à) professor (a) um planejamento detalhado e coerente para as aulas, assumindo o seu papel de atuar como um manual. Todavia, não pode desempenhar tal função prescindindo do professor e secundarizando a sua atuação. Professores (as) devem desempenhar um papel ativo, crítico e criativo em relação às propostas subjacentes ao livro didático, sempre pensando nos usos diferenciados que ele pode ensejar, como alterações de sequências, incorporação de atividades complementares, exploração de aspectos diversos da realidade local, dentre outros.
> - Subsidiar a avaliação dos conhecimentos, habilidades e atitudes a serem construídos no processo de ensino-aprendizagem: práticas de avaliação sempre se mostram desafiadoras aos docentes, razão pela qual espera-se que o livro didático contribua com a apresentação de critérios, estratégias e instrumentos de avaliação condizentes com as situações de ensino que propõe.
> - Contribuir para a operação de práticas interdisciplinares na escola: assim como a avaliação, a perspectiva interdisciplinar tem se revelado um desafio constante. Importante apoio do livro didático ao trabalho docente pode se dar pela indicação de sugestões para o planejamento, desenvolvimento e avaliação de projetos interdisciplinares.
> - Disponibilizar um bom Manual do Professor: muitas das funções anteriormente apresentadas se efetivam no Manual do Professor, que constitui um recurso essencial para o bom uso do livro didático, na medida em que explicita

> os fundamentos da proposta didático-pedagógica e orienta o docente em relação ao seu manejo, contribuindo substancialmente para a formação pedagógica. (BRASIL, 2017, p.12)

A partir das especificidades do programa e da importância do livro didático na prática pedagógica do professor, entendemos que uma análise sobre os materiais indicados pode favorecer o estudo sobre o ensino dos Números Irracionais. Tendo em vista essa relação do livro didático com a prática docente do professor de Matemática, este trabalho tem como finalidade a análise de alguns desses materiais buscando compreender como seus autores introduzem, conceituam e abordam Números Irracionais. Entendemos que tal análise possa contribuir para a avaliação de professores quanto à escolha do material que usarão como referência para o planejamento de suas práticas pedagógicas, bem como apontar questões pertinentes ao ensino dos Números Irracionais e dos reais. A seguir, apresentamos as coleções escolhidas para análise.

3.1 APRESENTAÇÃO DAS COLEÇÕES

Com base na importância do livro didático como material de apoio para o professor e no interesse em saber como o ensino de Números Irracionais está sendo realizado, foram selecionadas as coleções Matemática Bianchini e #Contato Matemática, destinadas para o Ensino Fundamental II e Médio, respectivamente.

A obra Matemática Bianchini, de Edwaldo Bianchini, “caracteriza-se por discutir os conceitos com base em um ou em poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e de atividades de aplicação” (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017). Os volumes da coleção são organizados em capítulos; cada um deles aborda algum campo da matemática escolar. Segundo o guia da obra, ao final do Manual do professor, encontra-se “Suplemento com orientações para o professor”, seção destinada ao professor com algumas sugestões e detalhamento de alguns itens do livro. Cada exemplar apresenta as seguintes seções:

- *Abertura*: seção onde é introduzido o tema do capítulo por meio de recursos como textos com situações do dia a dia, imagens do cotidiano, História da Matemática, etc;
- *Exercícios propostos e complementares*: esta seção apresenta uma variedade de exercícios (de aplicação, de exploração, de sistematização, de aprofundamento), organizadas segundo o grau de dificuldade, além de exercícios que propõe o uso da calculadora;
- *Para saber mais*: seção destinada a textos sobre a Geometria e a História da Matemática;
- *Trabalhando a informação*: apresenta atividades interdisciplinares;
- *Atividades especiais*: seção que apresenta atividades desafiadoras e de temas variados.
- *Lista de siglas*;
- *Sugestão de leitura para os alunos*;
- *Bibliografia da coleção*.

A distribuição dos conteúdos entre os quatro anos encontra-se nos anexos deste trabalho (anexo 1).

Segundo o site do PNLD 2018, a obra #Contato Matemática, de Joamir Souza e Jacqueline Garcia,

> [...] utiliza uma linguagem clara e objetiva para abordar os conteúdos da disciplina, com o apoio de atividades que colocam em prática os conteúdos estudados e aprofundam o conhecimento, de uma forma dinâmica e descomplicada, proporcionando uma experiência completa e agradável à prática de ensinar e aprender". (FTD EDUCAÇÃO, 2017)

A obra tem como principais características a relação dos conteúdos matemáticos com outras áreas de conhecimento; atividades para fixação e aprofundamento dos conteúdos; aplicação do conteúdo através de softwares gratuitos e, por fim, sugere livros e sites para a ampliação de conhecimentos. Apresenta também o manual para o professor com o intuito de auxiliar o trabalho do mesmo. Neste, destaca pontos que são considerados importantes através de comentários e sugere recursos didáticos e leituras complementares para um melhor uso da obra.

Segundo o guia da obra, cada livro didático apresenta:

- *Abertura*: seção inicial de cada capítulo que apresentam textos de diversos temas relacionados com o que será estudado;
- *Atividades resolvidas*: seção que apresenta exemplos de resolução de algumas atividades;
- *Atividades*: seção destinada as atividades que aplicam os conceitos estudados, estas apresentam questões relacionadas com outras disciplinas e aplicadas no Enem;
- *Calculadora*: seção que apresenta atividades em que se explora o uso da calculadora;
- *Desafio*: seção de atividades que possuem caráter desafiador;
- *Contexto*: seção que relaciona o conteúdo estudado com situações do cotidiano, através de textos e atividades;
- *Ser consciente*: seção destinada a aplicar os conceitos matemáticos estudados a assuntos como ética, educação financeira, cidadania, saúde, entre outros;
- *Acessando tecnologias*: seção de atividades que utilizam recurso tecnológico como planilha eletrônica e o Geogebra;
- *Ampliando seus conhecimentos*: seção que apresenta sugestões de livros e sites para a ampliação do que foi estudado;
- *Bibliografia consultada pelos autores*.

A distribuição dos conteúdos pelos volumes da coleção está disponível nos anexos (anexo 2).

3.2 ANÁLISE DA ABORDAGEM DO CONTEÚDO DE NÚMEROS IRRACIONAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS SELECIONADOS

3.2.1 ENSINO FUNDAMENTAL

O ensino dos Números Irracionais no ensino fundamental é orientado pelo Conteúdo Básico Comum (CBC) de Matemática a partir do 8º ano. Esse documento orienta a organização curricular no estado de Minas Gerais. Apresenta uma proposta curricular, dispondo a descrição dos conteúdos e as habilidades que os alunos devem aprender em cada disciplina. Sua estrutura é formada pelos eixos temáticos (Números e Operações, Álgebra, Espaço e Forma e Tratamentos de Dados) que possuem temas específicos da disciplina. Cada tema é dividido em tópicos que apresentam habilidades, as quais se espera desenvolver ao fim do estudo.

O conteúdo de Números Irracionais é classificado como conteúdo complementar pelo documento. As habilidades são descritas no Tema 1: Conjuntos Numéricos, do Eixo Temático I – Números e Operações, no tópico de Conjunto dos números reais (p.22):

Conjunto dos números reais	• Reconhecer a necessidade da ampliação do conjunto dos números racionais através de situações contextualizadas e da resolução de problemas. • Identificar números racionais com as dízimas periódicas. • Identificar as dízimas não periódicas com os números irracionais. • Usar geometria para construir alguns segmentos de comprimento irracional.

Devido à orientação de distribuição do conteúdo, durante a análise dos livros didáticos não foram encontradas referências aos Números Irracionais no livro do 6º ano.

No livro do 7º ano também não foi encontrada nenhuma referência aos irracionais. No entanto, no fim do livro, no Manual do Professor, no “Suplemento com orientações para o professor”, sugere-se a atividade abaixo (Figura 2) para se trabalhar com números racionais:

Dízimas periódicas e a calculadora

Objetivos

– Observar o surgimento de dízimas periódicas em alguns casos de divisão de inteiros, como 1 : 7; 2 : 3 etc.

– Fazer conjecturas a respeito das regularidades que relacionam os números presentes na fração geratriz e na representação decimal das dízimas.

Desenvolvimento

1. Pedir aos alunos que calculem e observem os resultados das divisões a seguir:

- 1 : 9 = 0,111...
- 2 : 9 = 0,222...
- 4 : 9 = 0,444...
- ...
- 1 : 90 = 0,0111...
- 2 : 90 = 0,0222...
- 4 : 90 = 0,0444 ...

Por meio desses exemplos, pedir aos alunos que escrevam um texto explicando a regularidade presente nessas divisões.

2. Um modo de explicar o fato de a divisão entre dois números inteiros resultar em outro número inteiro ou em uma dízima periódica é mostrar aos alunos que, à medida que a divisão das sucessivas casas decimais é efetuada, os restos possíveis na divisão são finitos e, portanto, em algum momento, eles obrigatoriamente têm de se repetir. Por exemplo, em uma divisão por 7, há apenas sete restos possíveis: 0 (divisão exata e que, portanto, não gera dízima periódica), 1, 2, 3, 4, 5 ou 6; então, no máximo após sete divisões, poderá haver uma repetição dos algarismos, como em 1 : 7:

```
10      |_7_________
 30      0,1428571
  20          |
   60         |
    40    Repete-se o
     50     período
      10
       3
```

Aproveitar esse exemplo para apresentar um tipo curioso de fração. Pedir aos alunos que, com o auxílio de uma calculadora, calculem e registrem o valor das seguintes frações:

- $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$
- $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$
- $\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$
- $\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$
- $\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$
- $\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$

Pedir aos alunos que observem os números que se repetem nas dízimas e que concluam que os mesmos algarismos do período 142857 obtido na fração $\frac{1}{7}$ repetem-se nas demais frações, apenas iniciando-se em uma posição diferente:

0,285714

0,428571

0,571428

e assim por diante.

Figura 2 – Atividade dízimas periódicas e calculadora

Esta atividade permite que os alunos compreendam a definição de período e trabalhem com a ideia de aproximação. Pommer apud Hariki (2012), em seu estudo, acredita que as respostas que obteve realizando um estudo sobre medida revelam “a possibilidade de se trabalhar a ideia de medida à exatidão ou a aproximação, que enriquece o repertório de conhecimento ao situar e demarcar o conjunto dos números racionais e dos números irracionais." (2012, p. 116). Nesse contexto, iniciamos aqui um relato sobre uma discussão que aconteceu na aula de Supervisão de Estágio III na qual discutíamos o conceito de dízimas periódicas. Tal fato aconteceu com a autora deste trabalho, um colega da turma e a professora de Supervisão de Estágio III. Durante a discussão sobre o ensino de dízimas periódicas, nos dispusemos escrever o número $\frac{100}{61}$ na forma decimal, através do algoritmo da divisão. No entanto, após sucessivas divisões (mais de 40 divisões) ainda não havíamos encontrado o período. Essa situação causou um certo estranhamento, uma vez que tal fato ia contra as definições e conceitos de números racionais. Solicitamos a ajuda da professora, e após um longo período, encontramos o período de $\frac{100}{61}$ com mais de 60 casas decimais. Com base na literatura e nesse relato, consideramos que pedir para o aluno encontrar o período das dízimas periódicas possa ser significativo para a compreensão dos alunos quanto aos conceitos de infinito e dízima não-periódica de um número irracional.

No 8º ano será o momento em que os alunos terão o primeiro contato com os Números Irracionais.

> Mas tratar este assunto no nível fundamental é, certamente, muito difícil. Os números irracionais não existem no mundo concreto, são abstrações matemáticas, só existem no mundo das ideias, para aceita-los é preciso imaginar processos infinitos e proximidades que tendem a zero. Ou seja, é necessária a noção de limites e continuidade. (GARCIA, FRONZA E SOARES, 2005, p.6)

Bianchini começa a desenvolver esta ideia de abstração no livro didático através da raiz quadrada aproximada com números inteiros (Figura 3) e, posteriormente, com números racionais. Neste contexto, assim como Pommer, acredito que "é importante discutir a questão de aproximação no ensino básico, podendo constituir poderoso meio de abordar os números irracionais, além de permitir esclarecer as conexões com os números racionais" (POMMER, 2012, p.39).

Veja o que acontece quando queremos extrair a raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito. Para exemplificar, vamos calcular a raiz quadrada do número 31.

O número 31 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 25 e 36.

$$25 < 31 < 36$$

Então, $\sqrt{31}$ deve estar compreendida entre $\sqrt{25}$ e $\sqrt{36}$.

$$\sqrt{25} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$$

Como $\sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{36} = 6$, temos:

$$5 < \sqrt{31} < 6$$

Dizemos, então, que:

- **5** é a raiz quadrada **aproximada por falta, a menos de uma unidade**, do número 31;
- **6** é a raiz quadrada **aproximada por excesso, a menos de uma unidade**, do número 31.

Figura 3 – Aproximação

Após desenvolver esta noção de proximidade, o livro aborda a noção de infinito e continuidade através de um “número não racional” (Figura 4). Garcia, Fronza e Soares acreditam que apresentar os irracionais a partir da negação dos números racionais pode deixar dúvidas sobre sua existência (2005, p.7).

5 Números irracionais e números reais

Considere o número 0,101112...

Observando a formação desse número, vamos supor que podemos dar continuidade à sua parte decimal do seguinte modo: 0,10111213...; 0,1011121314...; e assim por diante.

Como a representação decimal desse número tem infinitas casas decimais e não é periódica, não podemos obter sua forma de fração; logo, esse número não é racional.

Figura 4 –Utilização do termo “número não racional”

No entanto, logo em seguida, o autor do livro didático utiliza o termo “número irracional” (Figura 5):

Com esses exemplos, percebemos que existem números que não são representados nem por uma forma decimal exata (com um número finito de casas decimais), nem por uma dízima periódica. Portanto, não podem ser escritos na forma de fração e, consequentemente, não são números racionais. Esse tipo de número chamamos de **número irracional**.

Agora, considere a representação decimal dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ com sete casas decimais.

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135 \quad \text{e} \quad \sqrt{3} \simeq 1{,}7320508$$

Por maior que seja o número de casas decimais que queiramos dar a esses números, nunca vamos encontrar para eles uma representação decimal exata ou periódica. Portanto, não há frações que os representem. Por isso, dizemos que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais. Também é irracional toda raiz quadrada de um número natural que não seja quadrado perfeito, assim como toda raiz quadrada de fração positiva irredutível cujo numerador e denominador não seja quadrado perfeito.

Como exemplo de números irracionais, temos:

$$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{9}$$

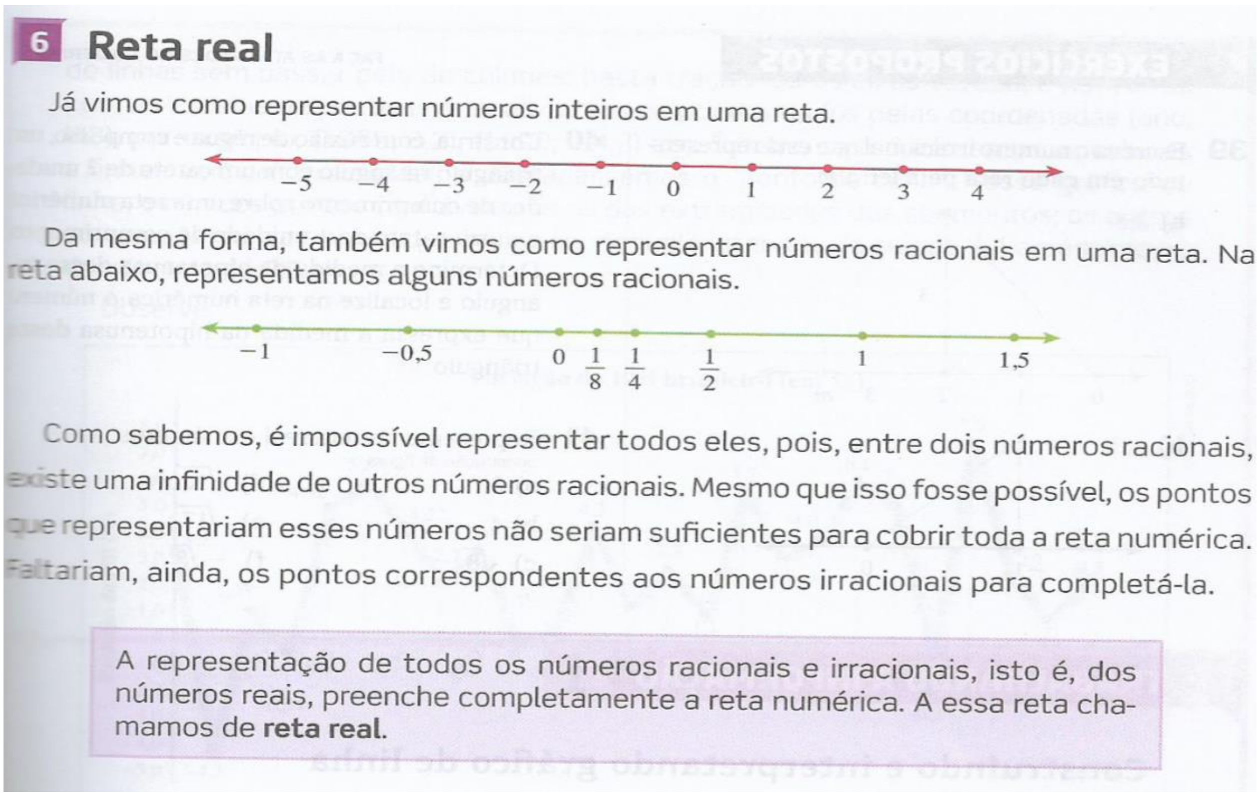
Figura 5 – Utilização do termo “número irracional”

Junto às ideias de Pommer, percebemos que o livro aborda os temas considerados essenciais para dar significado aos Números Irracionais: aproximação e infinito. No entanto, este mesmo autor acredita que é preciso ter cautela. Uma vez que, “ao aproximar um número irracional, há uma implicação. Este tratamento de aproximação mascara um significado básico dos números irracionais: infinitas casas decimas e não periódicas” (2012, p.67)

Para definir o conjunto dos números reais, Bianchini utiliza a reta real (Figura 6). Em seu trabalho, no qual discute o ensino dos Números Irracionais e reais, Bortoletti destaca que este

> [...] conceito está diretamente ligado ao ensino de números reais, entretanto não é feita uma discussão com os alunos sobre o que realmente representa a reta real e o “por que” de seu uso. Talvez, fosse interessante discutir a causa de não se utilizar uma reta formada apenas por números racionais. (BORTOLETTI, 2008, p.32)

Neste contexto, percebemos que o livro realiza a proposta interessante sugerida por Bortoletti. Proporcionando ao aluno reflexões sobre a necessidade se definir o conjunto dos números reais desta forma.


6 Reta real

Já vimos como representar números inteiros em uma reta.

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

Da mesma forma, também vimos como representar números racionais em uma reta. Na reta abaixo, representamos alguns números racionais.

−1 −0,5 0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 1,5

Como sabemos, é impossível representar todos eles, pois, entre dois números racionais, existe uma infinidade de outros números racionais. Mesmo que isso fosse possível, os pontos que representariam esses números não seriam suficientes para cobrir toda a reta numérica. Faltariam, ainda, os pontos correspondentes aos números irracionais para completá-la.

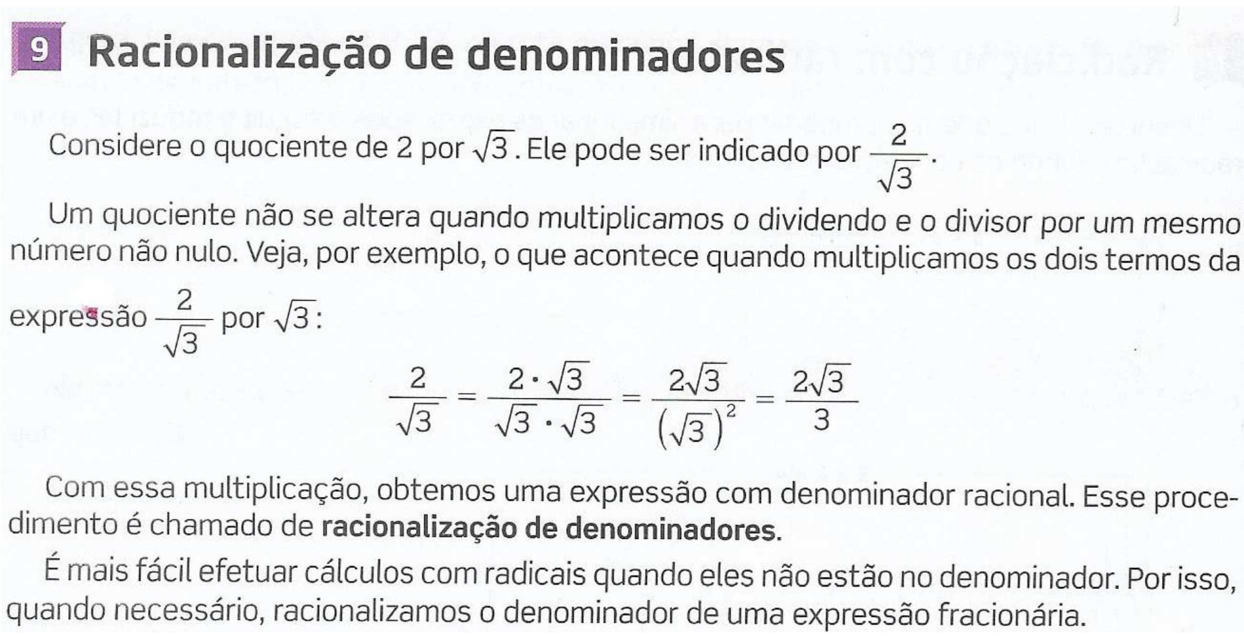
A representação de todos os números racionais e irracionais, isto é, dos números reais, preenche completamente a reta numérica. A essa reta chamamos de **reta real**.

Figura 6 – Reta real

Ao fim do livro, no Manual do Professor, no “Suplemento com orientações para o professor”, encontra-se uma sugestão de leitura para o professor sobre os Fibonaccis Áureos.

No livro do 9º ano, foi possível identificar um caráter operacional no tratamento dos Números Irracionais, devido a abordagem de radiciação. Ali trabalha-se com os alunos adição, subtração, multiplicação e divisão com radicais. Sobre esta abordagem, nota-se determinada preocupação com os cálculos deixando de lado o significado de Números Irracionais. Pommer considera que “[...] tais expressões representam um processo infinito, que pode ser aproximado por um processo finito, expressando assim resultados da operação de aproximação, na concepção de que esta pode ser melhorada o quanto se deseje ou se necessite.” (2012, p.164). Acho válido enfatizar essa ideia para os alunos.

O autor Bianchini define racionalização de denominadores conforme abaixo:



9 Racionalização de denominadores

Considere o quociente de 2 por $\sqrt{3}$. Ele pode ser indicado por $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Um quociente não se altera quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número não nulo. Veja, por exemplo, o que acontece quando multiplicamos os dois termos da expressão $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Com essa multiplicação, obtemos uma expressão com denominador racional. Esse procedimento é chamado de **racionalização de denominadores.**

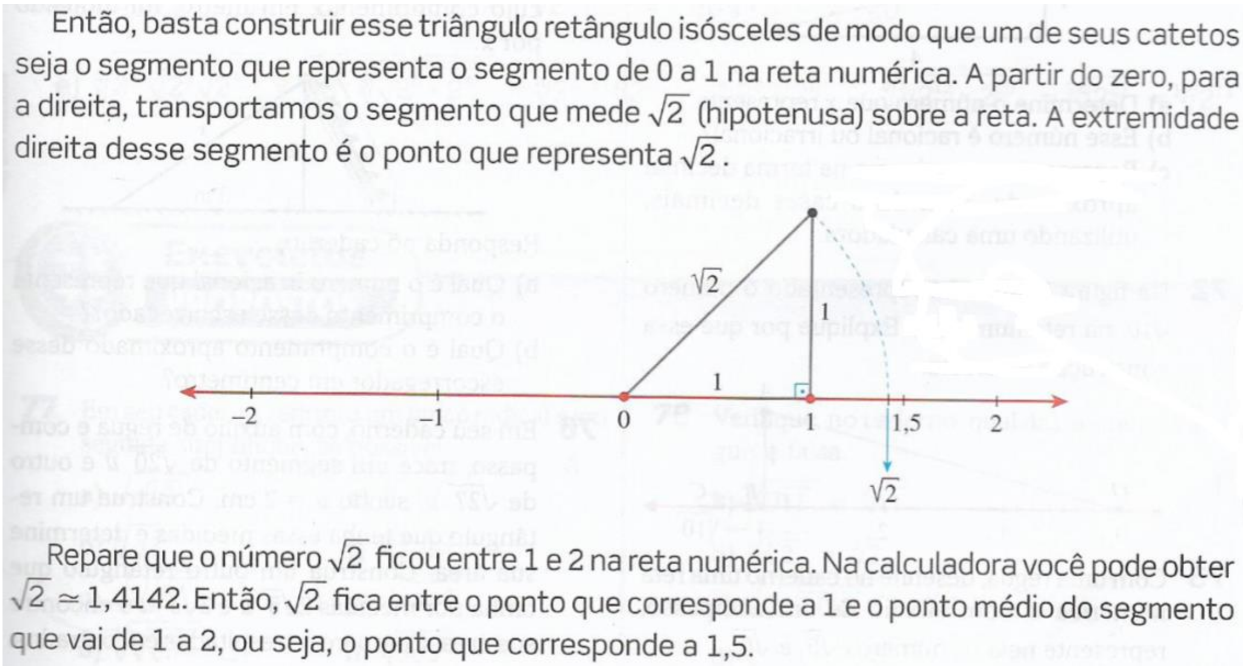
É mais fácil efetuar cálculos com radicais quando eles não estão no denominador. Por isso, quando necessário, racionalizamos o denominador de uma expressão fracionária.

Figura 7 – Racionalização de denominadores

Em uma de suas análises sobre a racionalização de denominadores, Pommer deixa o seguinte questionamento: “[..] além de aprimorar a técnica, por que atualmente é importante aprender a racionalizar as raízes enésimas de irracionais?” (2012, p.58). Assim como o autor eu me questiono, por que nós professores ensinamos os alunos a racionalizar? Qual o objetivo desta operação? Com esta situação, observa-se o que Bortoletti diz

> [...] após a introdução dos números irracionais, é comum que se deixe de lado a representação decimal e se passe a trabalhar apenas com raízes, reduzindo os números irracionais a um amontoado de regras de operar com radicais. Desta maneira, os conjuntos acabam se tornando um amontoado de números. (BORTOLETTI, 2008, p.31)

Neste ano também é abordada a representação geométrica dos Números Irracionais expressos por radicais. Pommer diz que os livros didáticos, tendo como base os PCN, “[...] se restringem ao cálculo aproximado e a representação geométrica, não destacando a problemática do significado relativo ao conceito de aproximação, nem colocam em evidência a questão conceitual da incomensurabilidade” (2012, p.117). Pode-se verificar a crítica realizada pelo autor na seguinte abordagem:



Então, basta construir esse triângulo retângulo isósceles de modo que um de seus catetos seja o segmento que representa o segmento de 0 a 1 na reta numérica. A partir do zero, para a direita, transportamos o segmento que mede $\sqrt{2}$ (hipotenusa) sobre a reta. A extremidade direita desse segmento é o ponto que representa $\sqrt{2}$.

Repare que o número $\sqrt{2}$ ficou entre 1 e 2 na reta numérica. Na calculadora você pode obter $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$. Então, $\sqrt{2}$ fica entre o ponto que corresponde a 1 e o ponto médio do segmento que vai de 1 a 2, ou seja, o ponto que corresponde a 1,5.

Figura 8 – Representação geométrica

No 9º ano é trabalhado com os alunos o Teorema de Pitágoras. Assim como as autoras Garcia, Fronza e Soares vemos que “não se faz relação entre as questões geométricas que originaram a criação dos irracionais com este conteúdo. Inverte-se a ordem, colocando-se a Geometria depois dos Irracionais.” (2005, p. 16). Com isso, surge o questionamento: será que introduzir o conjunto dos Números Irracionais concomitantemente com o Teorema de Pitágoras não poderia fazer mais sentido para os alunos?

Por fim, no Manual do Professor, no “Suplemento com orientações para o professor”, encontra-se uma sugestão de leitura para o professor que conta a história do número π. Observamos, desse modo, a História da Matemática sendo utilizada como para ampliação de conhecimentos do docente. Segundo os PCN, a História da Matemática

> [...] ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, p.42, 1998)

Assim, encerramos a análise da coleção de livros didáticos do ensino fundamental. Por meio dela, podemos observar que a abordagem inicial do ensino dos irracionais enfatiza a ideia de irracionalidade, através da discussão de sobre os temas: infinito e aproximação. No entanto, a partir da abordagem operacional com os irracionais essas ideias acabam sendo omitidas e o conceito de irracionalidade é posto de lado.

Com base nas observações feitas, continuemos a análise com a coleção de livros didáticos do ensino médio.

3.2.2 ENSINO MÉDIO

A partir das orientações presentes no Conteúdo Básico Comum (CBC) do Ensino Médio, é possível verificar que os conceitos sobre Números Irracionais são trabalhados com os alunos no 1º ano do Ensino Médio de forma mais específica. No tema 1 (Números) do Eixo Temático I – Números, Contagem e Análise de dados são apresentadas as habilidades que são esperadas que os alunos adquiram por meio do estudo deste conteúdo (p.44):

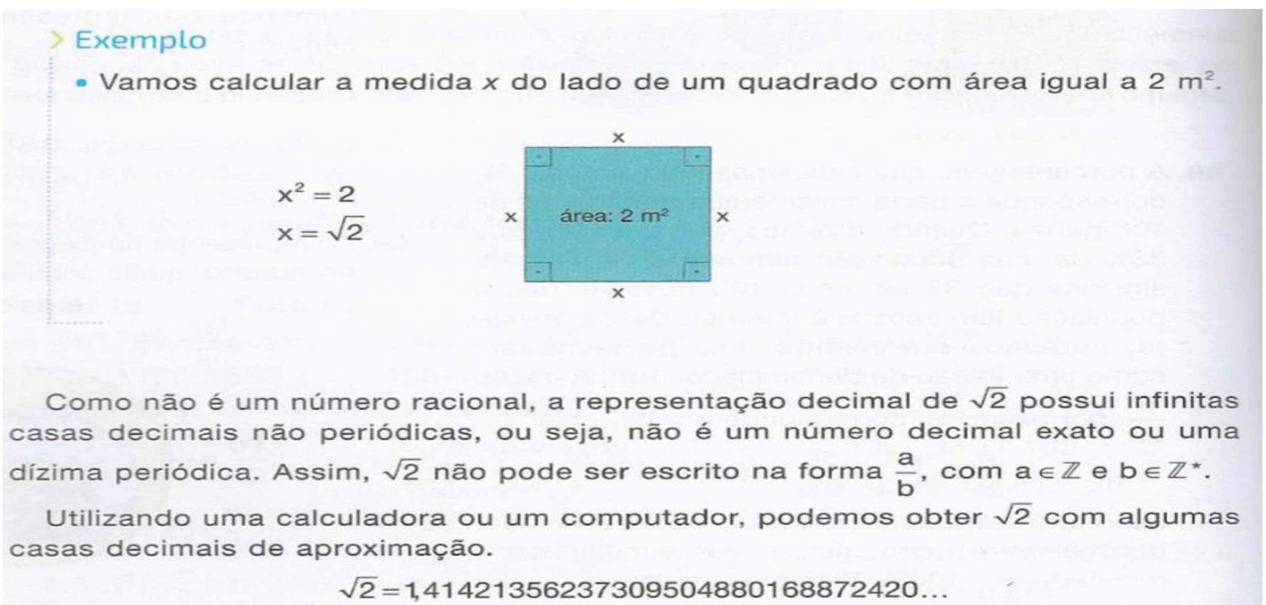
TÓPICOS	HABILIDADES
1. Números racionais e dízimas periódicas	1.1. Associar a uma fração sua representação decimal e vice-versa. 1.2. Reconhecer uma dízima periódica como uma representação de um número racional.
2. Conjunto dos números reais	2.1. Reconhecer uma dízima não periódica como uma representação de um número irracional.

	2.2. Utilizar números racionais para obter aproximações de números irracionais.
3. Potências de dez e ordem de grandeza	3.1. Resolver problemas que envolvam operações elementares com potências de dez.

Por este motivo, a análise de livros realizada a seguir, se desenvolve minunciosamente no livro do 1º ano do Ensino Médio.

Analisamos a coleção #Contato Matemática, no volume 1, que aborda os conteúdos referentes ao 1º ano do ensino Médio. Encontra-se no capítulo 1 – Os conjuntos, uma página com informações sobre o conjunto dos Números Irracionais. No texto é realizada uma breve apresentação histórica sobre os Números Irracionais e depois são apresentados exemplos numéricos e geométricos sobre este tipo de número.

Os autores definem o conjunto dos Números Irracionais a partir do exemplo geométrico que obtém √2 como lado de um quadrado de área 2. Após a definição, é dada uma aproximação de 29 casas decimais do número √2 dado pela calculadora.



> Exemplo

- Vamos calcular a medida x do lado de um quadrado com área igual a 2 m².

$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

Como não é um número racional, a representação decimal de $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, não é um número decimal exato ou uma dízima periódica. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Utilizando uma calculadora ou um computador, podemos obter $\sqrt{2}$ com algumas casas decimais de aproximação.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420\ldots$$

Figura 9 – Abordagem via negação dos racionais e representação decimal

Com esta estruturação e a partir das considerações realizadas, pode-se identificar e descrever a abordagem da definição dada pelos autores, do mesmo modo que Bortoletti

> A Abordagem via Negação dos Racionais, define irracional como um número que não é racional, ou seja, não pode ser expresso como uma razão entre dois inteiros. O objetivo maior é definir um conjunto que contém os números conhecidos – racionais – e mais alguma coisa – os irracionais. Esta definição é dada por mera formalidade, sem grande ênfase.
>
> A Abordagem via Representação Decimal, define irracional como um número cuja representação decimal é infinita e não periódica. Neste caso, os primeiros exemplos são raízes de números primos e o objetivo é relacionar os irracionais com radicais, para passar às operações com estes números. (BORTOLETTI, 2008, p.28)

Consideramos que a representação dos Números Irracionais na reta numérica (Figura 10) e o item 58 dispostos pelos autores sejam interessantes. Nota-se que a abordagem dada pelos autores não é muito explorada no ensino de Matemática; geralmente, as abordagens de representações de números na reta real se limitam apenas aos conjuntos dos inteiros e dos racionais.

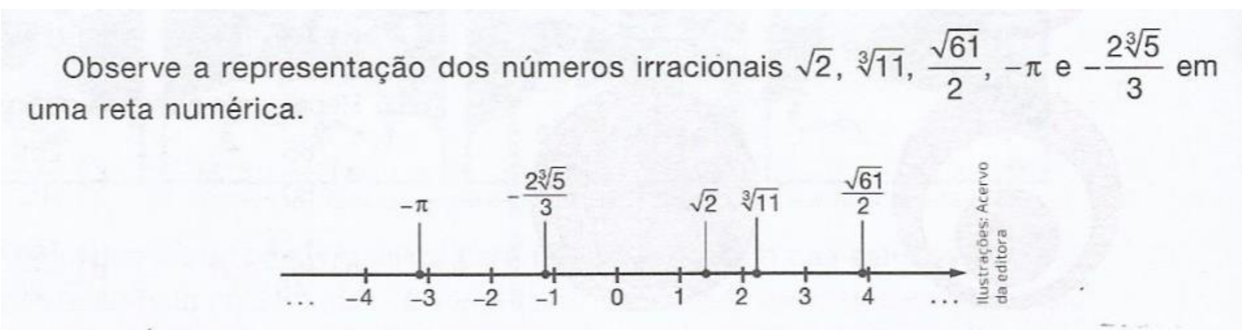


Figura 10 – Representação de números na reta real

Contudo, acreditamos que seria necessário deixar explícito para o aluno ou então orientar o professor a informar que esta representação na reta numérica é uma aproximação, devido à definição de Números Irracionais.

Outra questão que merece ser refletida é o modo como é apresentado o π para os alunos (Figura 11).

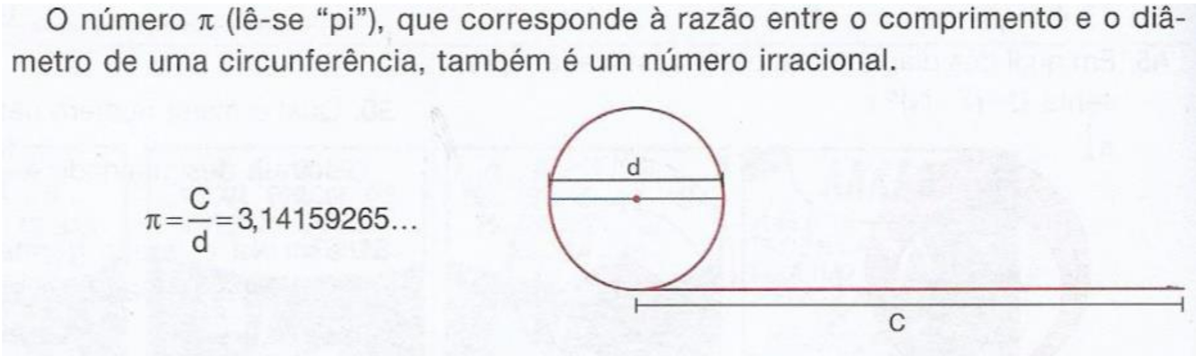


Figura 11 – Cálculo do comprimento da circunferência

Para enriquecermos a reflexão sobre este número tão falado na Matemática, temos a pesquisa realizada por Bortoletto sobre as abordagens do ensino do número π, informando que

> [...] a maioria dos professores que introduzem π na 5ª série não o definem como “número irracional” e sim como “número resultante de uma razão” e quanto aos professores que ensinam π a partir da 7ª série, a maioria o define como “número irracional. (BORTOLETTO, 2008, p.59)

Note que uma abordagem semelhante é adotada no ensino médio. Esta pode confundir o aluno, levando-o a pensar que um número irracional pode ser escrito com a razão de dois números inteiros. Consideramos válido que seja realizado uma explicação sobre as operações com Números Irracionais, de modo que se possa esclarecer ao aluno que, se a razão de dois números resulta em um número irracional é porque um dos números é irracional.

Analisando a seção de atividades, observam-se exercícios com caráter diversificado para o ensino-aprendizagem de Números Irracionais. A seguir será realizada uma breve discussão sobre os mesmos.

No item 53 (Figura 12), é solicitado ao aluno determinar a diagonal de alguns retângulos e classificar o valor obtido em racional ou irracional.

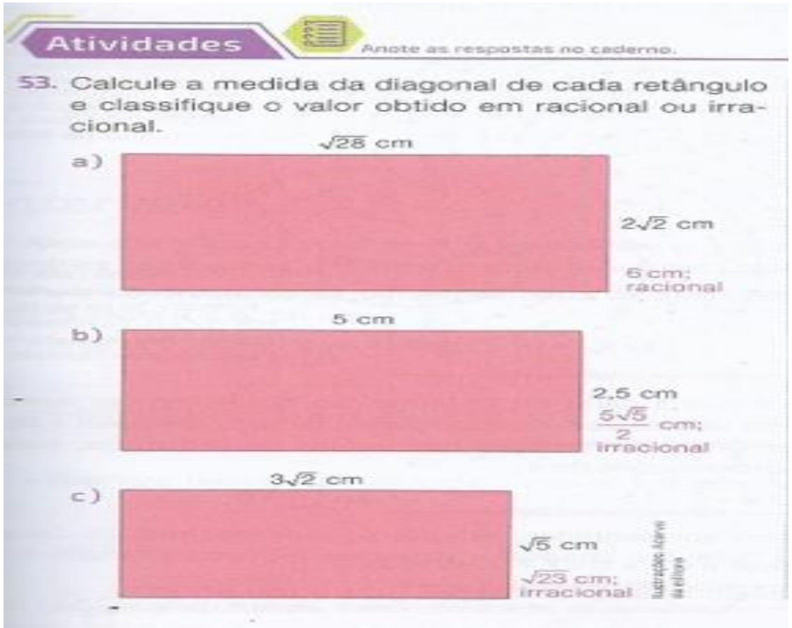
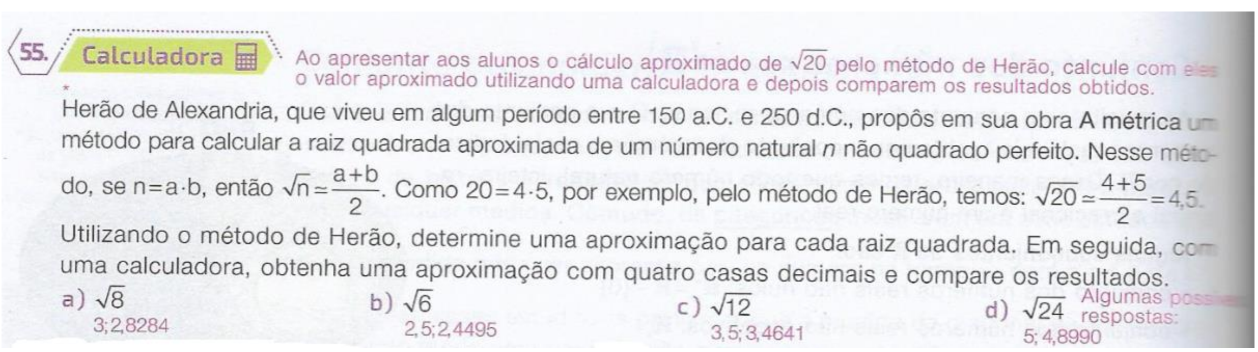


Figura 12 – Medidas aproximadas

É válido considerar que a atividade “[...] privilegia operações e propriedades com radicais, não dando atenção para outros aspectos dos números irracionais” (RIBEIRO, 2004, p.44). Pensamos que seja interessante ressaltar aos alunos que as medidas irracionais apresentadas na ilustração são aproximações.

Na página seguinte, Figura 13, o item 55 sugere que o aluno utilize a calculadora para comparar o resultado aproximado da mesma com o valor encontrado calculado à mão, pelo método de Herão.



55. Calculadora — Ao apresentar aos alunos o cálculo aproximado de $\sqrt{20}$ pelo método de Herão, calcule com eles o valor aproximado utilizando uma calculadora e depois comparem os resultados obtidos.

Herão de Alexandria, que viveu em algum período entre 150 a.C. e 250 d.C., propôs em sua obra **A métrica** um método para calcular a raiz quadrada aproximada de um número natural *n* não quadrado perfeito. Nesse método, se $n = a \cdot b$, então $\sqrt{n} \simeq \frac{a+b}{2}$. Como $20 = 4 \cdot 5$, por exemplo, pelo método de Herão, temos: $\sqrt{20} \simeq \frac{4+5}{2} = 4,5$.

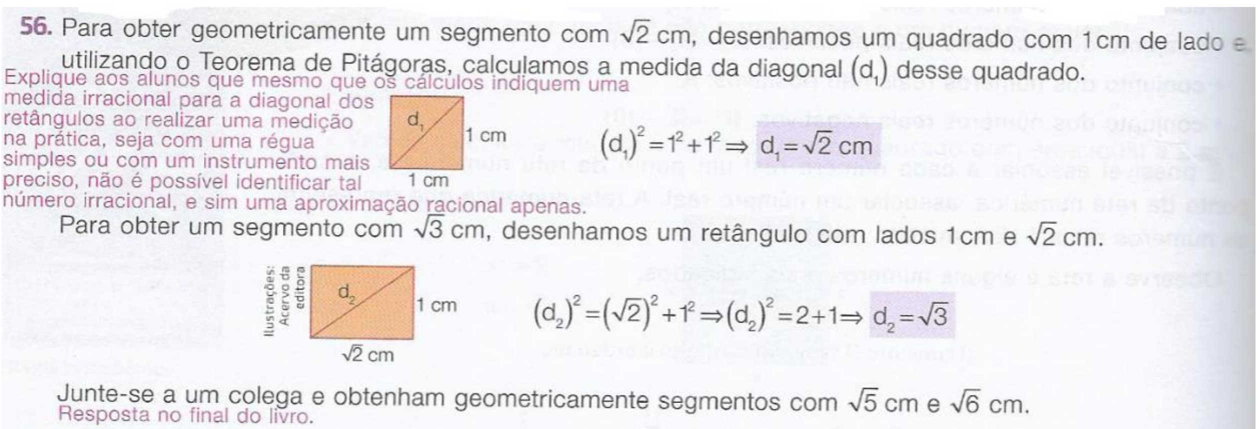
Utilizando o método de Herão, determine uma aproximação para cada raiz quadrada. Em seguida, com uma calculadora, obtenha uma aproximação com quatro casas decimais e compare os resultados.

a) $\sqrt{8}$ 3; 2,8284 b) $\sqrt{6}$ 2,5; 2,4495 c) $\sqrt{12}$ 3,5; 3,4641 d) $\sqrt{24}$ 5; 4,8990 Algumas possíveis respostas:

Figura 13 – Uso da calculadora

Segundo Schiffl (2006, p.19), “o ensino não deve ser centrado na máquina”, mas sim na busca de um trabalho para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Neste sentido, acredito que a calculadora seja um recurso importante para a compreensão dos Números Irracionais, principalmente quanto a ideia de aproximação. É preciso discutir com os alunos que quando operamos com Números Irracionais na calculadora e encontramos um número decimal, tal número é uma aproximação do resultado. Uma vez que estamos trabalhando com números que possuem infinitas casas.

No item 56 (Figura 14), pede-se que os alunos obtenham segmentos irracionais geometricamente. Nota-se que as considerações realizadas anteriormente sobre as medidas irracionais são pertinentes, uma vez que os autores as apresentam neste exercício como orientação para a explicação do professor.



56. Para obter geometricamente um segmento com $\sqrt{2}$ cm, desenhamos um quadrado com 1 cm de lado e, utilizando o Teorema de Pitágoras, calculamos a medida da diagonal (d_1) desse quadrado.

Explique aos alunos que mesmo que os cálculos indiquem uma medida irracional para a diagonal dos retângulos ao realizar uma medição na prática, seja com uma régua simples ou com um instrumento mais preciso, não é possível identificar tal número irracional, e sim uma aproximação racional apenas.

$$(d_1)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Para obter um segmento com $\sqrt{3}$ cm, desenhamos um retângulo com lados 1 cm e $\sqrt{2}$ cm.

$$(d_2)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 \Rightarrow (d_2)^2 = 2 + 1 \Rightarrow d_2 = \sqrt{3}$$

Junte-se a um colega e obtenham geometricamente segmentos com $\sqrt{5}$ cm e $\sqrt{6}$ cm.
Resposta no final do livro.

Figura 14 – Construção de segmentos irracionais

No volume 2 da coleção, voltada para o 2º ano do ensino médio, não há nenhuma especificação para o ensino dos Números Irracionais. No entanto, estes aparecem ao longo do livro.

No capítulo 1 do livro, destinado a Trigonometria, os autores informam que o arco pode ser medido em graus ou radianos e acrescentam: “Lembre-se que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por C = 2πr. Portanto, um arco de uma volta corresponde a 2π rad.” (p.11). Acreditamos que seja válido aparecer no livro didático um lembrete para os alunos referente à conversão de radianos em graus, destacando que quando substituímos 2π rad por $2 \cdot 180°$, isso não indica que 3,14159265359... = 180°; e sim que o arco de comprimento igual a 2π rad corresponde a uma volta completa na circunferência, equivalente a 360°.

Já no conteúdo de Matrizes e determinantes, presente no capítulo 2, são apresentadas as seguintes atividades:

1. Escreva a ordem de cada matriz.

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ 2×2

b) $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ \sqrt{2} & 15 & -4{,}3 \\ 1 & 7 & 10 \\ -9 & \pi & 0{,}5 \end{bmatrix}$ 5×3

c) $C=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 & 13 \end{bmatrix}$ 1×4

d) $D=\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{5} & x^3 & -3 \\ 1 & \sqrt[3]{-8} & 4 & x+1 \end{bmatrix}$ 2×4

2. Na matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5{,}7 & -3 & 2 \\ 4 & 15 & 3 & \sqrt{7} & 6 \\ \pi & -9 & 10 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, qual o valor do elemento:

a) a_{11}? 0 b) a_{13}? 5,7 c) a_{31}? π d) a_{24}? $\sqrt{7}$

Figura 15 - Matrizes

Raramente vemos exercícios que utilizam Números Irracionais como elementos de matrizes. Exercícios deste tipo exemplificam para os alunos que uma representação matricial pode ser realizada sobre qualquer conjunto.

Nos estudos geométricos realizados a partir do capítulo 6, são utilizadas medidas de segmentos e áreas de tamanho irracional. Pommer acredita que “no ensino atual, a transposição didática do campo dos números irracionais foi realizada de modo a diluir a gênese do conhecimento matemático frente ao par exato&aproximado” (2012, p.119) Neste contexto, suponho que seja interessante destacar para os alunos que a medidas dadas e encontradas não são exatas, e sim, aproximações. Este fato referente aos assuntos geométricos também se repete no volume 3, quando se trabalha com definições de geometria analítica (capítulo 2).

Assim, como ressaltei no conteúdo de Matrizes e determinantes, os Números Irracionais também foram utilizados em Polinômios (capítulo 6) como coeficientes.

No volume 3, no capítulo 5 destinado aos números complexos, é sugerido que o professor lembre os alunos que o conjunto dos Números Irracionais é I = IR – Q, porém, no desenho dos conjuntos oculta-se o conjunto dos Números Irracionais. Considero que o desenho seja importante para a compreensão do aluno sobre os conceitos de inclusão dos conjuntos. Por isso se faz necessária a indicação dos irracionais no mesmo.

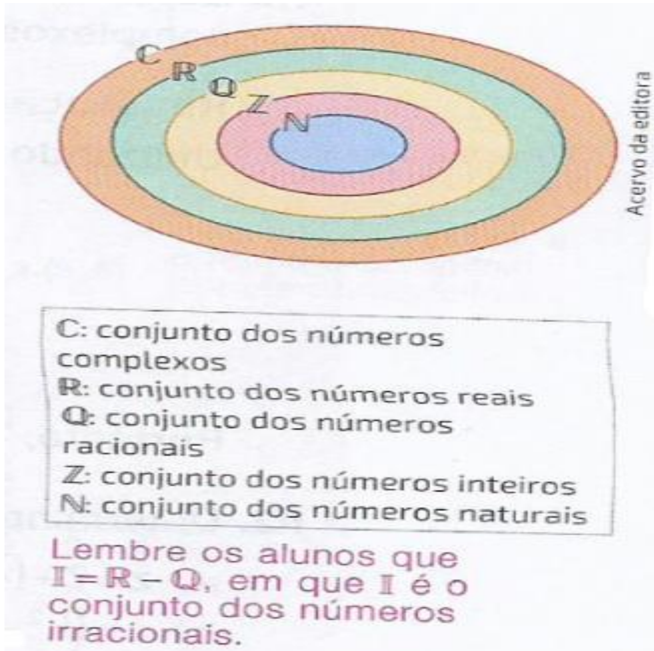


Figura 16 – Conjuntos numéricos

No geral, percebemos que o livro didático apresenta grande parte do que é sugerido para o ensino de Matemática nos PCN. No entanto, algumas questões que consideramos significativas para o ensino dos Números Irracionais não foram destacadas pelo autor.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da história, verifica-se a existência de diversos relatos sobre o desenvolvimento da ideia de irracionalidade, desde o “choque” dos pitagóricos com números que não podiam ser mensurados até a noção de cortes de Dedekind. Com base nestas histórias, é possível perceber a dificuldade da humanidade para compreender a existência dos Números Irracionais.

De certo modo, paralelo à história desses números, no ensino dos Números Irracionais também é possível identificar uma dificuldade no entendimento e compreensão dos alunos. Alguns autores acreditam que esta dificuldade está relacionada com o modo com que se realiza a transposição didática do tema. Esta dificuldade na transposição já pode ser identificada na definição dos conjuntos numéricos. Por isso, a necessidade de se repensar o ensino dos Números Irracionais no âmbito escolar.

Com base no estudo bibliográfico é possível apontar que o desenvolvimento das ideias de aproximação e de infinito são fundamentais para que o aluno compreenda os conceitos e as operações que abordam a irracionalidade. Caso estas ideias não sejam discutidas, a compreensão do conceito de irracionalidade pode ficar comprometida.

Observa-se que tais ideias são enfatizadas durante a abordagem inicial do conteúdo, quando se apresentam os Números Irracionais para os alunos no 8º ano. No entanto, posteriormente, quando são realizadas operações com os Números Irracionais verifica-se que as ideias de infinito e aproximação não são tão trabalhadas. Neste contexto, sugere-se que o professor recorde aos alunos tais conceitos para que a operacionalização com Números Irracionais não se torne algo mecânico.

Dos pontos e aspectos observados na análise, é válido destacar que a sugestão da utilização da História da Matemática feita pelos PCN está sendo utilizada pelos livros. Em diversos momentos, os autores dos livros didáticos utilizaram a História da Matemática para enriquecer a abordagem do conteúdo para os alunos. Também foi utilizada como sugestão de leituras para ampliação de informações para o professor. Acredito que este tipo de abordagem favoreça a construção de significados abstratos tão presentes no conteúdo matemático.

Também foi possível verificarmos que as tecnologias de informação são ferramentas de auxílio para o ensino de Matemática. Verificamos que em diversas atividades, os autores sugeriram a calculadora para se desenvolver a ideia de infinito e aproximação no ensino de Números Irracionais.

Nota-se que as ideias intuitivas e abstratas que são requeridas durante a aprendizagem do conteúdo podem ser empecilhos para a compreensão dos alunos. No entanto, percebe-se que os livros didáticos omitem determinadas ideias, podendo dificultar ainda mais a compreensão dos Números Irracionais.

Nesta perspectiva, incentivamos e destacamos a importância da criticidade do professor de Matemática ao utilizar o livro que adotar, de modo que possa complementar e alterar a abordagem do livro didático com o objetivo de favorecer a aprendizagem do aluno no que se refere aos Números Irracionais.

5. REFERÊNCIAS

ALVES, E. R. **Números Negativos, Irracionais e Frações Decimais: Um pouco da história de como e quando surgiram e uma aplicação dos números negativos para alunos da graduação de Licenciatura em Matemática**. In: Academos – Revista Eletrônica da FIA. Vol. 3. 2007. Disponível em: http://intranet.fainam.edu.br/acesso_site/fia/academos/revista3/8.pdf. Acesso em: abr. 2017.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 7ª ed. São Paulo: Editora Moderna. 2011.

BONGIOVANNI, V. **As duas maiores contribuições de Eudoxo Cnido: a teoria das proporções e o método de exaustão**. UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 2, p. 91 – 110. Jun. 2005. Disponível em: http://centroedumatematica.com/ciaem/articulos/historia/textos/As%20duas%20maiores%20contribuicoes%20de%20eudoxo%20de%20cnido%20%5C%22a%20teoria%20das%20proporcoes%20e%20o%20metodo%20de%20exaustao%5C%22*Bongiovanni%20Vicenzo.*Union_002_008.pdf. Acesso em: out. 2017.

BORTOLETTI, A. A. **Abordagem para o ensino de Números Reais na escola de Nível Fundamental**. Monografia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto alegre. 2008. Disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/~comgradmat/tccs/monos_0802/TCC_Anderson.pdf. Acesso em: ago. 2017.

BORTOLETTO, A. R. S. **Reflexões relativas às definições do número π (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental**. Dissertação. Universidade Metodista de Piracicaba. São Paulo. 2008. Disponível em: https://www.unimep.br/phpg/bibdig/pdfs/2006/RYXMQMJTVEXB.pdf. Acesso em: ago. 2017.

BORTOLOSSI, H. J.; MÓZER, G. S. **Para que servem os Números Irracionais? Indo além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes**. In: 12º. Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Anais do 12º. Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016. Disponível em: https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_-Para-que-servem-os-numeros-irracionais.pdf. Acesso em: set. 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Eliza F. Gomide. Editora Edgar Blücher. 2ª ed. São Paulo. 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: abr. 2017.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 2ª ed. Editora da UNICAMP. Campinas. São Paulo. 1997.

FTD Educação. **PNLD 2018 Ensino Médio**. Disponível em: http://pnld.ftd.com.br/detalhes.php?id=4. Acesso em: ago. 2017.

GARCIA, V. C. FRONZA, J. SORES, D.S. **Ensino dos Números Irracionais e Reais no Ensino Fundamental: coleção cadernos para professores**. Vol 1. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2005. Disponível em: http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/GR%C1FICA-IRRACIONAIS.pdf. Acesso em: ago. 2017.

GARCIA, J.S.R, SOUZA, J.R. **#Contato Matemática**. Editora FTD. 1ª edição. São Paulo. 2016.

GONÇALVES C. H. B., POSSANI C. **Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga**. Matemática Universitária, v.47, p. 16-24. 2009. Disponível em: http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n47/n47_Artigo02.pdf. Acesso em: abr. 2017.

GREGIO, B. C. **Construção dos Números Reais via os cortes de Dedekind**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. São Paulo. 2014. Disponível em: http://bri.ifsp.edu.br/portal2/phocadownload/2016/Matematica/TCC/2014/construo%20dos%20nmeros%20reais%20via%20cortes%20de%20dedekind.pdf.

LUCHETTA, V. O. J. MILES, C. P. **Dedekind: A fundamentação dos Números Reais**. Disponível em: http://www.matematica.br/depends.html . Acesso em: junho de 2017.

MARTINS, L. SANTOS, V. A. **A importância do livro didático**. Camdombá – Revista Virtual, v. 7, n.1, p.20-33. Jan – Dez 2011. Disponível em: http://revistas.unijorge.edu.br/candomba/2011-v7n1/pdf/3VanessadosAnjosdosSantos2011v7n1.pdf .Acesso em: abr. 2017.

MIGUEL, A... [et al.]. **História da Matemática em atividades didáticas**. 2ª ed. rev. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MENDES, S. C. C. **Práticas pedagógicas para o ensino dos Números Irracionais**. Dissertação. Universidade Severino Sombra. Vassouras. 2012. Disponível em: http://www.uss.br/arquivos/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2012/DISSERTACA_Sonia_Cristina_da_Cruz_Mendes.pdf. Acesso em: abr. 2017.

MENEZES, E. T. SANTOS, T. H. V. **Programa Nacional do Livro Didático (PNLD**) - Dicionário Interativo da Educação Brasileira – Educabrasil. São Paulo. Midiamix. 2001. Disponível em: http://www.educabrasil.com.br/pnld-programa-nacional-do-livro-didatico/. Acesso em: nov. 2017.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Guia digital**. 2017. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/. Acesso em: abr.2017.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte. Universidade Federal de Minas Gerais - CAED. 2013. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf.

MOSCA, M. A. **Números Irracionais no Ensino Médio: desdobrando o tema com equações polinomiais**. Dissertação. Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/762/2011_00538_MARCOS_ANTONIO_MOSCA.pdf?sequence=1. Acesso em: abr. 2017.

POMMER, W. M. **Números Irracionais no Ensino Fundamental: Uma análise em livros didáticos**. Encontro Paraense de Educação Matemática. Belém – Pará. 2011. Disponível em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3812/20209/CO+2011+EPANEM+Livro+Did%C3%A1tico.pdf. Acesso em: abr. 2017

POMMER, W. M. **A construção de significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. Tese. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2012. Disponível em: http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/123456789/1633/2012_Pommer_A%20constru%C3%A7%C3%A3o%20de%20significados%20dos%20n%C3%BAmeros%20irracionais%20no%20ensino%20b%C3%A1sico.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: abr. 2017.

Proposta Curricular (CBC) – Matemática - Ensinos Fundamental e Médio. Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais. Disponível em: http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-

4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf. Acesso em: abr. 2017.

RIBEIRO, R. E. S. **O ensino dos Números Irracionais**. Monografia. Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma. 2004. Disponível em: http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000025/000025F9.pdf. Acesso em: ago.2017.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar. Rio de Janeiro. 2012.

SANTOS, J. C. **Números Reais: um desafio na Educação Básica**. Monografia. Centro de Estudos Gerais. Niterói. Rio de Janeiro. 2007. Disponível em: http://www.meusiteantigo.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia_Real.pdf. Acesso em: nov.2017.

SANTOS, J. C. S. O. **Uma breve história de π**. Gazeta de Matemática, nº 145, p.43-48, julho 2003. Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=80. Acesso em: abr. 2017.

SCHIFFL, D. **Um estudo sobre o uso da calculadora no ensino de Matemática**. Dissertação. Santa Maria. 2006. Disponível em: http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/dissertacoes/Schifll_Daniela.pdf. Acesso em: jun. 2017.

SILVA. A. C. TURÍBIO. S.R.T. **A influência do livro didático de matemática na prática pedagógica do professor que ensina Matemática na Educação Básica**. 2014. Disponível em: https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjGhu3CmenXAhVFlpAKHebFD2sQFggoMAA&url=https%3A%2F%2Fwww.fe.ufg.br%2Fnedesc%2Fcmv%2Fcontrole%2FDocumentoControle.php%3Fo

per%3Ddownload%26cod%3D1826&usg=AOvVaw2n8-44K9Nolagedt0qw2i4. Acesso em: nov. 2017.

SOUZA, J.R. GARCIA, J. S. # **Contato Matemática**. 1ª ed. São Paulo: FTD. 2016.

6. ANEXOS

Anexo 1 – Distribuição dos conteúdos na coleção Matemática Bianchini

6º ANO
CAPÍTULO 1 – Sistemas de numeração: egípcio, babilônico, romano, indo-arábico; números naturais: registros, sucessor, antecessor, comparação – tabelas
CAPÍTULO 2 - Números naturais: adição, subtração – gráficos de colunas – expressões numéricas; multiplicação; divisão; potenciação; radiciação; expressões numéricas com potenciação e radiciação – gráficos de barras
CAPÍTULO 3 - Figuras geométricas planas e não planas; poliedros; ponto, reta e plano – tabelas e gráficos de barras
CAPÍTULO 4 - Múltiplos; divisores; sequências numéricas; critérios de divisibilidade; números primos; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum
CAPÍTULO 5 - Posições relativas de duas retas em um plano; semirreta; segmentos de reta; ângulos: classificação, retas perpendiculares
CAPÍTULO 6 - Números racionais: definição, fração; porcentagem; frações: ideias – gráficos de colunas e tabelas – frações: equivalência, simplificação – gráficos de setores – comparação de frações
CAPÍTULO 7 - Frações: adição e subtração com mesmo denominador; porcentagens; frações: adição e subtração com denominadores diferentes, multiplicação – gráficos de barras – frações: divisão, potenciação, raiz quadrada, expressões numéricas – probabilidade
CAPÍTULO 8 - Números decimais: forma fracionária, comparação, reta numérica, adição, subtração – gráfico de colunas – números decimais: multiplicação e divisão por potências de 10, multiplicação e divisão – médias – números decimais: potenciação, expressões numéricas, representação, dízima periódica; porcentagem
CAPÍTULO 9 - Polígonos: elementos, classificação; triângulos: elementos, classificação, propriedades; quadriláteros; poliedros: classificação, planificação; prismas; pirâmides
CAPÍTULO 10 - Comprimento; perímetro; área – gráficos de setores– medidas agrárias; área de triângulo
CAPÍTULO 11 - Medidas de tempo; volume: metro cúbico, paralelepípedo, cubo; capacidade; massa – estimativas; gráficos de colunas

7º ANO
CAPÍTULO 1 – Números inteiros: reta numérica, módulo, comparação, adição – tabelas – números inteiros: propriedades, adição, multiplicação, divisão, expressões numéricas, potenciação, raiz quadrada
CAPÍTULO 2 - Números racionais: definição, dízima periódica, reta numérica, módulo, comparação, adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, raiz quadrada, expressões numéricas – tabelas, gráficos de colunas
CAPÍTULO 3 - Ângulos: medida, classificação, congruentes, operações, bissetriz – gráfico de setores
CAPÍTULO 4 - Equações; expressões algébricas; valor numérico; equações do 1°grau com uma incógnita: resoluções – médias e estimativas
CAPÍTULO 5 - Inequações – gráficos de colunas, tabelas
CAPÍTULO 6 - Equações com duas incógnitas: par ordenado, representação geométrica – possibilidades e probabilidades – sistemas de equações do 1°grau com duas incógnitas – tabelas, gráficos de colunas e linhas
CAPÍTULO 7 - Simetria axial; ângulos: complementares, suplementares, opostos pelo vértice
CAPÍTULO 8 - Razão – tabelas, gráfico de barras – proporção: propriedade fundamental
CAPÍTULO 9 - Grandezas diretamente e inversamente proporcionais; regra de três simples – gráficos de barras e colunas – regra de três composta – porcentagem – gráficos de setores
CAPÍTULO 10 - Área – estimativas – figuras equivalentes; áreas: paralelogramo, triângulo, losango, trapézio – pictogramas; gráficos de colunas

8º ANO
CAPÍTULO 1 – Posições relativas entre retas; ângulos: bissetriz, adjacentes, complementares, suplementares, opostos pelo vértice – gráficos de setores – ângulos formados por duas retas e uma transversal
CAPÍTULO 2 - Números reais: naturais, inteiros, racionais, representação, raiz quadrada, irracionais, reta numérica – gráficos de linhas
CAPÍTULO 3 - Incógnita, variável, expressões algébricas, valor numérico; monômios: adição, multiplicação, divisão, potenciação; polinômios: definição, operações – gráficos: colunas e linhas duplas
CAPÍTULO 4 - Polígonos: elementos, diagonais, soma dos ângulos internos e externos, polígonos regulares, congruência; transformações geométricas: reflexão, translação, rotação
CAPÍTULO 5 - Produtos notáveis; fatoração
CAPÍTULO 6 - Triângulos: classificação, condição de existência, mediana, bissetriz, congruência, propriedades
CAPÍTULO 7 - Quadriláteros: paralelogramos, propriedades, retângulos, losangos, quadrados, trapézios

CAPÍTULO 8 - Frações algébricas: simplificação, equações – gráficos de barras – equações literais; plano cartesiano – gráficos de colunas – sistemas de equações do 1°grau com duas incógnitas
CAPÍTULO 9 - Circunferência: comprimento, posições relativas, segmentos tangentes, triângulo e quadrilátero circunscrito, arco de circunferência, ângulo central, ângulo inscrito

9º ANO
CAPÍTULO 1 – Potências; notação científica; cálculo com raízes; radicais: propriedades, adição algébrica, multiplicação, divisão, potenciação; radiciação; racionalização
CAPÍTULO 2 - Teorema de Tales; figuras semelhantes
CAPÍTULO 3 - Gráficos: colunas, barras, setores, linhas, pictogramas; cartogramas; infográficos; frequência relativa; medidas de tendência central; probabilidade; tabelas e gráficos
CAPÍTULO 4 - Equações do 2°grau: raízes, resoluções, relações de Girard – mapas
CAPÍTULO 5 - Projeções ortogonais; triângulo retângulo: teorema de Pitágoras; relações métricas – gráficos
CAPÍTULO 6 - Razões trigonométricas; tabela
CAPÍTULO 7 - Função polinomial do 1º grau: definição, gráfico – juros – função polinomial do 2°grau: gráfico, vértices da parábola, valor máximo e mínimo, estudo do sinal
CAPÍTULO 8 - Circunferência: definição, comprimento, arco, propriedades entre arcos e cordas, triângulo retângulo inscrito, relações métricas
CAPÍTULO 9 - Polígonos regulares: propriedades, elementos, relações métricas, área

Anexo 2 – Distribuição dos conteúdos na coleção # Contato Matemática

VOLUME 1
CAPÍTULO 1 - Os conjuntos
1. Estudando conjuntos 2. Igualdade de conjuntos 3. Conjuntos unitário, vazio e universo 4. Subconjuntos 5. Operações com conjuntos 6. Problemas envolvendo conjuntos 7. Conjuntos numéricos 8. Intervalos
CAPÍTULO 2 - As funções
1. Noção intuitiva de função 2. Produto cartesiano 3. Conceito de função 4. Gráfico de uma função 5. Funções crescente, decrescente e constante 6. Funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva

CAPÍTULO 3 - Função Afim
1. Estudando função afim 2. Gráfico de uma função afim 3. Função crescente e função decrescente 4. Estudo do sinal de função afim 5. Proporcionalidade e função linear 6. Inequação do 1º grau
CAPÍTULO 4 - Função Quadrática
1. Estudando função quadrática 2. Gráfico de uma função quadrática 3. Valor máximo e valor mínimo de uma função quadrática 4. Estudo do sinal de uma função quadrática 5. Inequação do 2º grau
CAPÍTULO 5 - Função Exponencial
1. Estudando função exponencial 2. Revendo potenciação 3. Notação científica 4. Função exponencial 5. Equação exponencial 6. Inequação exponencial
CAPÍTULO 6 - Logaritmo e função logarítmica
1. Estudando logaritmo 2. Propriedades operatórias dos logaritmos 3. Função logarítmica 4. Equação logarítmica 5. Inequação logarítmica
CAPÍTULO 7 - Função Modular
1. Módulo de um número real 2. Função modular 3. Equação modular 4. Inequação modular
CAPÍTULO 8 - As progressões
1. Sequências 2. Progressão Aritmética 3. Progressão Geométrica
CAPÍTULO 9 - Trigonometria no triângulo retângulo
1. Teorema de Tales 2. Teorema de Pitágoras 3. Trigonometria no triângulo retângulo 4. Trigonometria em um triângulo qualquer

VOLUME 2
CAPÍTULO 1 – Trigonometria
1. Trigonometria na circunferência

2. Seno, cosseno e tangente de um arco 3. Funções trigonométricas 4. Fórmulas de transformação 5. Relações trigonométricas 6. Equações trigonométricas
CAPÍTULO 2 - Matrizes e determinantes
1. Estudando matrizes 2. Alguns tipos de matrizes 3. Igualdade de matrizes 4. Matriz transposta 5. Adição e subtração de matrizes 6. Multiplicação de um número real por uma matriz 7. Multiplicação de matrizes 8. Matriz inversa 9. Equações envolvendo matrizes 10. Determinante de uma matriz
CAPÍTULO 3 - Sistemas lineares
1. Estudando sistemas lineares 2. Equação linear 3. Sistema linear 4. Escalonamento de um sistema linear 5. Discussão de um sistema linear
CAPÍTULO 4 - Análise combinatória
1. Estudando análise combinatória 2. Princípio fundamental da contagem 3. Fatorial 4. Arranjo simples 5. Permutação simples 6. Combinação simples 7. Permutação com repetição 8. Binômio de Newton
CAPÍTULO 5 - Probabilidade
1. Estudando probabilidade 2. Calculando probabilidades 3. Probabilidade da união de dois eventos 4. Probabilidade condicional 5. Experimentos binomiais 6. Estatística e probabilidade
CAPÍTULO 6 - Área de figuras planas
1. Estudando áreas de figuras planas 2. Área de polígonos 3. Área de polígonos regulares 4. Razão entre área de figuras planas 5. Área do círculo
CAPÍTULO 7 - Geometria espacial de posição
1. Estudando geometria de posição

2. Posições relativas entre duas retas 3. Posições relativas entre retas e planos 4. Posições relativas entre dois planos 5. Propriedades de paralelismo e perpendicularismo 6. Projeções ortogonais sobre um plano 7. Distâncias no espaço
CAPÍTULO 8 - Figuras geométricas espaciais
1. Poliedros 2. Poliedros convexos e poliedros não-convexos 3. Relação de Euler 4. Poliedros de Platão 5. Poliedros regulares 6. Prismas 7. Pirâmides 8. Tronco de pirâmide reta 9. Não poliedros 10. Cilindro 11. Cone 12. Tronco de cone reto 13. Esfera

VOLUME 3
CAPÍTULO 1 - Matemática financeira
1. Estudando Matemática financeira 2. Porcentagem 3. Acréscimos e descontos sucessivos 4. Juro 5. Juro e funções 6. Sistema de amortização
CAPÍTULO 2 - O ponto e a reta
1. Estudando geometria analítica 2. Distância entre dois pontos 3. Coordenadas do ponto médio de um segmento 4. Condição de alinhamento de três pontos 5. Área de um triângulo 6. Reta 7. Equação de reta 8. Posição relativa entre duas retas 9. Ângulo entre duas retas concorrentes 10. Distância entre ponto e reta 11. Inequação do 1º grau com duas variáveis
CAPÍTULO 3 - A circunferência e as cônicas
1. Circunferência 2. Cônicas
CAPÍTULO 4 – Estatística

1. Estudando estatística 2. Variáveis estatísticas 3. População e amostra estatística 4. Gráficos e tabelas 5. Medidas de tendência central 6. Medidas de dispersão 7. Distribuição de frequência
CAPÍTULO 5 - Os números complexos
1. Estudando os números complexos 2. Conjunto dos números complexos 3. Operações com números complexos 4. Módulo de um número complexo 5. Representação trigonométrica de um número complexo 6. Números complexos e geometria
CAPÍTULO 6 - Os polinômios e as equações polinomiais
1. Polinômios 2. Operações com polinômios 3. Equações polinomiais 4. Teorema fundamental da álgebra 5. Relações de Girard 6. Multiplicidade de uma raiz 7. Raízes complexas 8. Pesquisando raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros